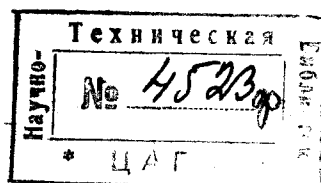


Труды Центрального аэро-гидродинамического института
им. проф. Н. Е. Жуковского

Выпуск 215



А. А. КОСМОДЕМЬЯНСКИЙ

К ТЕОРИИ ЛОБОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

I

ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

II

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПРОФИЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ
РУЛЯ ЖУКОВСКОГО

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
24	10 сверху	$\frac{dw}{d\zeta} \cdot \frac{dw}{d\zeta}$	$\frac{dw}{d\zeta} \cdot \frac{d\bar{w}}{d\zeta}$
24	11 "	где $\frac{dw}{d\zeta}$	где $\frac{d\bar{w}}{d\zeta}$
25	9 "	$d = [-\sin \varphi \dots$	$d\bar{\zeta} = [-\sin \varphi$
32	17 "	$\tau_0 = \mu U \frac{\pi}{2\epsilon} \dots$	$\tau_0 = \mu U \frac{\pi}{2\epsilon}$

Заказ 407.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В работе дается приближенный метод интегрирования дифференциального уравнения ламинарного пограничного слоя, исходя из интегрального соотношения Кармана. В отличие от работы Польгаузена автор разлагает функцию распределения скоростей в пограничном слое в тригонометрический ряд, что позволяет избежать введения дополнительного граничного условия и получить кривую распределения скоростей, вполне удовлетворительно совпадающую с экспериментом. Автор дает новое условие отрыва струй от криволинейного контура и решает задачу о нахождении точек срыва струй у эллиптических цилиндров различных эксцентриситетов, обтекаемых ламинарным потоком при различных углах атаки. Полученные результаты вполне удовлетворительно подтверждаются экспериментальными данными.

Во второй статье решается задача определения точек срыва струй для симметричного крыла типа инверсии параболы для различных углов атаки. Оказывается, что крылья до 11% толщины обтекаются ламинарным потоком при нулевом угле атаки без срыва струй. Для таких крыльев возможно найти полное лобовое сопротивление теоретическим путем.

Подсчитанный коэффициент сопротивления оказывается равным $\frac{4,25}{\sqrt{R}}$.



Редактор В. Л. Александров.

Техн. редактор И. А. Борунов.

Сдано в набор 26 февраля 1935 г. Подписано к печати 22 апреля 1935 г. 2 $\frac{1}{4}$ печ. листа. 66000 печ. знак, в 1 б. л. Формат бум. 72 X 110 Уполном. Главлита В-15897. Тираж 1000. Заказ № 407.

Типография „Коминтерн“ и школа ФЗУ. им. КИМ'а Ленинград, Красная, 1.

1. ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

§ 1. Введение

Одной из главнейших задач современной гидро- и аэродинамики является задача подсчета сопротивления движению тел в жидкости или воздухе. Как известно, гидродинамика идеальной жидкости не дает на этот вопрос удовлетворительного ответа: тело, находящееся в потоке совершенной жидкости, не испытывает никакого сопротивления, если только оно движется в жидкости с постоянной скоростью U_0 . Методы подсчета сопротивления, развитые работами Стокса и Озина, применимы только к очень медленным движениям сильно вязких жидкостей, т. е. в диапазоне очень малых чисел Рейнольдса, и в применении к жидкостям с малым внутренним трением дают совершенно неудовлетворительные результаты. Достаточно, например, указать, что лобовое сопротивление крыла типа инверсии параболы, подсчитанное методом Озина, получается для углов атаки от 0 до 20° , больше в $3\frac{1}{2}$ —4 раза экспериментально полученного.

Нам представляется, что единственно правильным методом решения поставленной задачи является метод пограничного слоя Прандтля, тем более, что физическая картина обтекания тела маловязкими жидкостями, принимаемая в основу теории пограничного слоя, подтверждена многочисленными экспериментами, проведенными с большой тщательностью и остроумием. Сопротивление тела, движущегося в жидкости с постоянной скоростью, можно разложить на две основных части:

- а) сопротивление давления,
- б) сопротивление трения.

Сопротивление давления для плохо обтекаемых контуров является главной частью общего сопротивления, испытываемого телом со стороны жидкости, и оно достаточно точно может быть выражено общеизвестной аэродинамической формулой

$$Q = C_p \rho S V^2,$$

где S — площадь миделевого сечения тела. Приближенные способы подсчета сопротивления давления для плоско-параллельного потока разработаны Карманом и у нас в СССР Л. С. Лейбензоном.

Сопротивление трения зависит от формы тела, закона нарастания пограничного слоя и места срыва струй с поверхности обтекаемого контура.

Все эти вопросы решаются, исходя из основных уравнений пограничного слоя, полученных Прандтлем еще в 1904 году.

Таким образом общая задача подсчета сопротивления тел, обтекаемых жидкостью с малой вязкостью, будет слагаться из двух разделов: во-первых, исходя из уравнений пограничного слоя, нужно получить распределение скоростей в пограничном слое, определить закон нарастания слоя и найти точку отрыва струй от поверхности тела. Этому разделу и будет посвящена настоящая работа. Решение названных вопросов позволит нам под-

считать сопротивление трения для изучаемого контура. Во-вторых, соединяя теорию пограничного слоя с основными идеями теории вихревого сопротивления, данными Карманом, мы сможем найти вторую часть сопротивления — именно сопротивление вихревое (точно совпадающее с сопротивлением давления при плоско-параллельном движении).

Совершенно ясно, что для тел, хорошо обтекаемых, будет преобладать сопротивление трения, для тел, плохо обтекаемых, — сопротивление вихревое.

Одним из наиболее важных вопросов, связанных с проблемой подсчета сопротивления трения, является вопрос о нахождении точки срыва струй. Точное решение этой задачи вряд ли возможно, так как из экспериментов известно, что малейшие изменения шероховатости поверхности, изменения структуры потока, расположение незначительных препятствий перед телом значительно изменяют место срыва струй. Здесь мы будем рассматривать только ламинарный поток жидкости, обтекающий совершенно гладкий контур.

В работе рассмотрены два приема нахождения точки срыва струй с криволинейных контуров.

1) Если контур плохо обтекаемый (например цилиндр), то для правильного определения точки срыва в установившемся движении необходимо знать из эксперимента распределение скоростей (или давлений) в функции длины дуги обтекаемого контура.

2) Если контур хорошо обтекаемый, то для нахождения точки срыва струй с поверхности тела достаточно знать распределение скоростей идеального потока около этого тела.

Исходя из потенциального распределения скоростей для контура плохо обтекаемого и применяя те же формулы для нахождения точки срыва, мы получим ту точку контура, где поток начинает отходить от стенки при образовании первой пары вихрей.

Настоящая работа была проведена под непосредственным руководством моего учителя проф. В. В. Голубева, который ценными указаниями не мало содействовал ее успешному завершению. Пользуюсь случаем еще раз выразить ему мою глубокую признательность и благодарность.

§ 2. Основные идеи теории пограничного слоя

Как известно, стационарное плоско-параллельное движение вязкой несжимаемой жидкости определяется дифференциальными уравнениями Навье-Стокса и уравнением непрерывности

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где Δ — оператор Лапласа, ρ — плотность жидкости, u, v — компоненты скорости, p — давление, а ν — кинематический коэффициент вязкости.

Полное решение системы уравнений (1) возможно для весьма ограниченного круга задач при некоторых частных предположениях, ввиду чрезвычайной математической сложности этих уравнений, обусловленной нелинейным характером их.

В историческом развитии гидро- и аэродинамики выявились совершенно отчетливо два подхода приближенного решения этих уравнений. Направление Стокса-Озина, стремящееся линеализировать эти уравнения: или совершенно пренебрегая инерционными членами (Стокс), или учитывая их только частично (Озин); и направление школы Прандтля, создателя современной теории пограничного слоя, где влияние вязкости учитывается только вблизи стенок.

Наиболее распространенными жидкими средами являются вода и воздух; кинематический коэффициент вязкости которых мал; поэтому влияние вязкости вдали от стенок очень незначительно, и мы можем рассматривать потоки этих жидких сред потенциалными, используя для плоско-параллельных течений весь материал классической гидродинамики. Вблизи же стенок, где имеет место значительный перепад скоростей, мы будем иметь значительное влияние вязкости. Следовательно, качественно картину обтекания тела маловязкой жидкостью можно представить так: в очень тонком слое вблизи тела, переходном или пограничном слое, величина скорости возрастает от нулевого значения (стенка) до скорости невозмущенного потенциального потока (внешняя граница слоя). Вне этого слоя влияние вязкости незначительно, и поток с очень большой точностью можно считать потенциалным.*

Указанные чисто физические соображения позволяют вывести и количественные соотношения.

Пусть толщина слоя — величина малая δ , а составляющая вектора скорости по оси x величина конечная — порядка 1, тогда из тождества

$$u = \int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial y} dy \sim 1$$

следует, что градиент скорости в направлении нормали к стенке $\frac{\partial u}{\partial y}$ велик — порядка $\frac{1}{\delta}$.

Это можно получить и непосредственно, если мы введем внутри слоя новую переменную $\eta = \frac{y}{\delta}$ (где η имеет тот же порядок, как и x); тогда

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial y} \text{ порядка } 1; \text{ а } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ — порядка } \frac{1}{\delta^2}.$$

Так как $\frac{\partial u}{\partial x}$ порядка 1, то на основании уравнения непрерывности и $\frac{\partial v}{\partial x}$ порядка 1, а из тождества

$$v = \int_0^{\delta} \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

следует, что v порядка δ и т. д.**

Уравнения Навье-Стокса с указанием порядка малости входящих членов можно представить в виде:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$1 \cdot 1 \quad \delta \cdot \frac{1}{\delta} \quad 1 \quad \frac{1}{\delta^2}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$$1 \cdot \delta \quad \delta \cdot 1 \quad \delta \quad \frac{1}{\delta}$$

* L. Prandtl. Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verh. der III Intern. Math. Kongress in Heidelberg. 1904.

** Более подробный вывод см. L. Prandtl und O. Tietjens. Hydro und Aeromechanik Bd. II, 1932.

Так как действие вязкости (силы трения) внутри пограничного слоя должно быть того же порядка, что и действие инерционных сил, ясно, что ν порядка δ^2 , а тогда второе из уравнений (2) сводится к утверждению, что $\frac{\partial p}{\partial y}$ порядка δ ; или что давление в пограничном слое практически не зависит от координаты, перпендикулярной к стенке, и, следовательно, оно целиком определяется давлением потенциального потока на внешней границе слоя.

Итак, из (2) получаем:

$$\boxed{u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \quad (3)$$

дифференциальное уравнение пограничного слоя, присоединяя сюда уравнение непрерывности

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0} \quad (4)$$

мы будем иметь следующую задачу.

Интегрированием системы уравнений (3) и (4) получить, при указанных выше допущениях, распределение скоростей в пограничном слое. Однако в такой постановке задача тоже не может быть решена, и для эффективного приближенного решения мы проинтегрируем (3) в пределах пограничного слоя и получим интегральное соотношение, которое Карман получил, применяя теорему импульсов*.

§ 3. Интегральное соотношение

Интегрируя каждый член уравнения (3) в пределах от нуля до δ , получим:

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy &= -\nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \\ \int_0^\delta \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dy &= \frac{1}{\rho} \delta \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned}$$

или, приняв во внимание уравнение Бернулли для струйки на внешней границе переходного слоя,

$$\frac{p}{\rho} = \text{const} - \frac{U^2}{2},$$

где U — скорость на внешней границе слоя, и дифференцируя его по x , получим

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -UU',$$

а следовательно

$$-\int_0^\delta \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dy = \delta UU'.$$

* Th. v. Kármán. Über laminare und turbulente Reibung. ZAMM. Bd. I, 1921.

Далее

$$\int_0^{\delta} u \frac{\partial u}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \frac{u^2}{2} dy - \frac{U^2}{2} \frac{d\delta}{dx},$$

так как δ — есть функция x , а

$$\int_0^{\delta} v \frac{\partial u}{\partial y} dy = (u \cdot v)_0^{\delta} - \int_0^{\delta} u \frac{\partial v}{\partial y} dy.$$

Но ясно, что:

$$(u \cdot v)_0^{\delta} = U \int_0^{\delta} \frac{\partial v}{\partial y} dy = -U \int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

на основании уравнения непрерывности.

Следовательно:

$$\int_0^{\delta} v \frac{\partial u}{\partial y} dy = -U \int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^{\delta} u \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

или

$$\int_0^{\delta} v \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \frac{u^2}{2} dy - \frac{U^2}{2} \frac{d\delta}{dx} - U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u dy + U^2 \frac{d\delta}{dx}.$$

Собирая все вычисленные интегралы, получим

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u^2 dy - U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u dy = \delta U U' - v \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}} \quad (5)$$

интегральное соотношение Кармана.

Искомая функция и должна удовлетворять следующим граничным условиям.

1) Условие прилипания при $y=0$, $u=0$.

2) Наличие перепада давления: при $y=0$ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{U U'}{\nu}$ это условие получается непосредственно из уравнения (3), если положить $u=0$ и $v=0$, что и действительно имеет место на твердой стенке.

3) Условие асимптотического перехода скорости в пограничном слое в скорость потенциального потока при

$$y=\delta \quad u=U.$$

4) Условие отсутствия трения на внешней границе слоя: при

$$y=\delta \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Заметим, что при приближенном подборе вида функции $u(y)$ К. Польгаузен берет совершенно произвольно еще одно условие:

$$y=\delta, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Это дополнительное условие не оправдывается ни теоретически, ни экспериментально, а поэтому оно для нашего решения удовлетворяться не будет.

§ 4. Выбор функции $u(y)$

Следуя методу, примененному нами при решении задачи об обтекании пластинки, будем искать функцию $u(y)$, дающую распределение скоростей в виде:

$$u = P(y) \cdot \sin \frac{\pi}{2\delta} \cdot y,$$

где $P(y)$ — неопределенный пока полином, вид которого определится из сформулированных выше граничных условий.

Действительно имеем:

$$P(\delta) = U$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=\delta} = \left(P'(y) \sin \frac{\pi}{2\delta} \cdot y + P \frac{\pi}{2\delta} \cos \frac{\pi}{2\delta} \cdot y \right)_{y=\delta} = P'(\delta) = 0$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} &= \left(P'' \sin \frac{\pi}{2\delta} y - P \frac{\pi^2}{4\delta^2} \sin \frac{\pi}{2\delta} y + P \frac{\pi}{\delta} \cos \frac{\pi}{2\delta} y \right)_{y=0} = \\ &= \frac{\pi}{\delta} \cdot P'(0) = -\frac{UU'}{\nu}, \end{aligned}$$

т. е. $P(y)$ может содержать только три неизвестных коэффициента. Полагая

$$P(y) = a + by + cy^2,$$

найдем для определения a, b, c , уравнения

$$\left. \begin{aligned} U &= a + b\delta + c\delta^2 \\ 0 &= 2c\delta + b \\ -\frac{UU'}{\nu} &= \frac{\pi}{\delta} \cdot b \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

из которых следует, что:

$$a = U \left(1 + \frac{U\delta^2}{2\nu} \right); \quad b = -\frac{UU'\delta}{\pi \cdot \nu}; \quad c = \frac{UU'}{2\pi\nu}.$$

Таким образом окончательный вид функции будет:

$$u = U \left[\left(1 + \frac{U\delta^2}{2\nu} \right) - \frac{U'\delta}{\pi \cdot \nu} y + \frac{U'}{2\pi\nu} y^2 \right] \sin \frac{\pi}{2\delta} \cdot y \quad (7)$$

Ясно, что способ подбора функции $u(y)$ до некоторой степени произволен, и единственным критерием правильности выбора является эксперимент.

Сравним теоретически полученную кривую распределения скоростей, даваемую формулой (7), с опытными данными Ганзена* и Грина**.

1) Рассмотрим сначала случай пластинки, поставленной параллельно потоку.

Имеем

$$U = \text{const}, \quad U' = 0$$

и следовательно

$$u = U \cdot \sin \frac{\pi}{2\delta} \cdot y \quad (8)$$

* Hansen M. „Die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht an einer eingetauchten Platte. ZAMM, 1928.

** J. Green. ARC, R & M. № 1313.

Подставляя (8) в интегральное соотношение, получим

$$\delta = 4,8 \sqrt{\frac{\nu \cdot x}{U}} *$$

а следовательно расчетная формула будет:

$$\frac{u}{U} = \sin \frac{\pi}{9,6} \cdot \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu \cdot x}{U}}} \quad (10)$$

Табл. к фиг. 1

$\frac{y}{\sqrt{\frac{\nu \cdot x}{U}}}$	$\frac{u}{U}$
0	0
0.5	0.163
1.0	0.323
2.0	0.610
2.5	0.730
3.0	0.835
3.5	0.910
4.0	0.965
4.8	1.000

На фиг. 1 приведена таблица значений $\frac{u}{U}$, рассчитанных по формуле (10), экспериментальные точки Ганзена и сплошной линией отмечена наша кривая

распределения скоростей. В опыте Ганзена замерялось распределение скоростей вдоль тонкой (2,5 мм) дюралевой полированной пластинки, и скорость потока была $U = 8$ м/сек.

2) Переходя к распределению скоростей в пограничном слое около круглого цилиндра, примем, приближенно, что и в случае криволинейного контура верна формула (9) (ниже мы покажем границы применимости этого предположения), тогда формула (7) для расчетов может быть приведена к виду:

$$u = U \left[1 + \lambda \left(1 - \frac{1}{n_1} \right)^2 \right] = \sin \frac{\pi}{2n_1}, \quad (11)$$

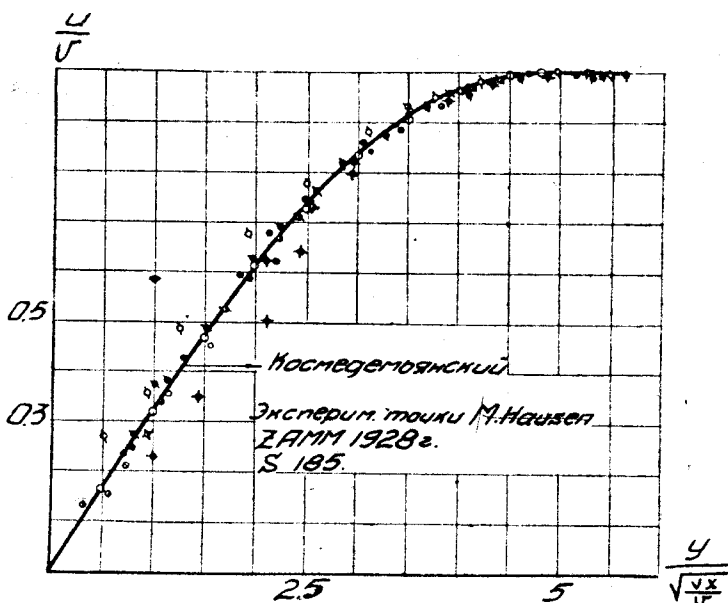
где

$$n_1 = \frac{\nu}{\delta},$$

а

$$\lambda = \frac{(4,8)^2 \operatorname{ctg} \varphi}{48}$$

Ниже приводятся таблицы для углов $\varphi = 20^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ (см. фиг. 2, 3 и 4).

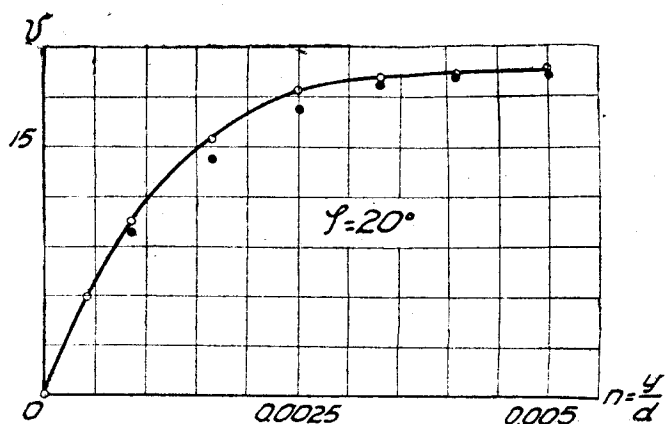


Фиг. 1.

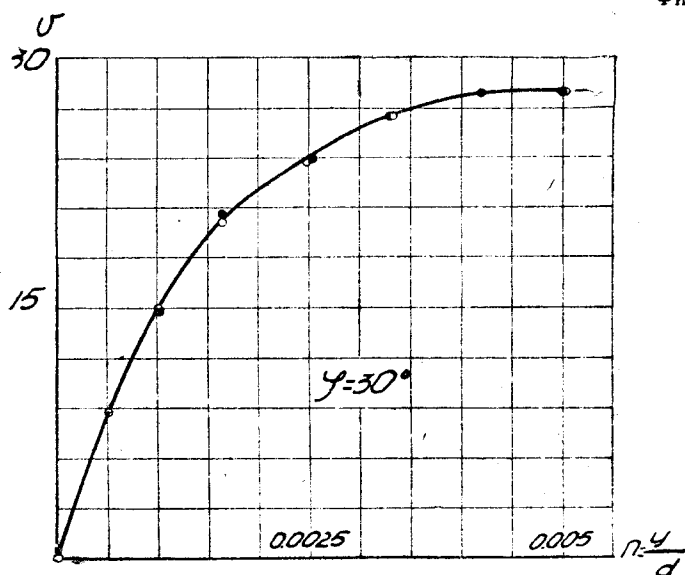
Таблица к фиг. 2

n_1	$V_{\text{теор.}}$	$V_{\text{эксп.}}$
3	15,4	14,3
2	18,3	16,9
$5/3$	19,0	18,4
$5/4$	19,4	19,3
1	19,5	19,5

$\varphi = 20^\circ$



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Таблица к фиг. 3

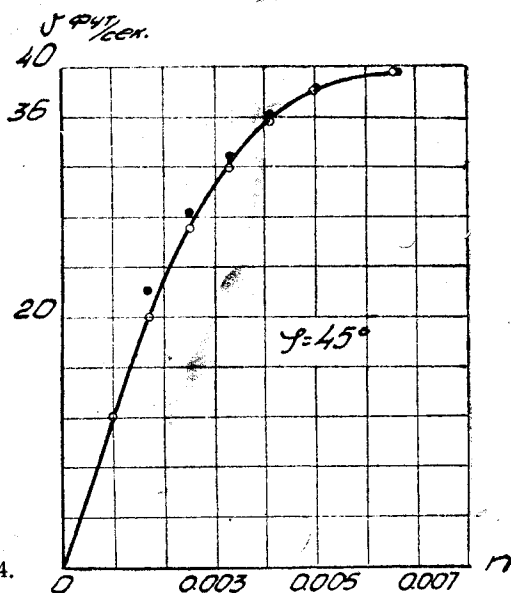
n_1	$V_{\text{теор.}}$	$V_{\text{эксп.}}$
3	16,1	18,9
2	20,7	21,0
$5/3$	22,0	22,2
$5/4$	23,1	23,0
1	23,4	23,4

$\varphi = 30^\circ$

Таблица к фиг. 4

n_1	$V_{\text{теор.}}$	$V_{\text{эксп.}}$
$5/2$	27	25,93
2	30,8	31,75
$16/10$	34,5	35,80
$6/5$	38,0	37,50
$11/10$	38,4	38,3
1	38,8	38,8

$\varphi = 45^\circ$



Фиг. 4.

Опыты Грина проводились с цилиндром диаметра $d = 1/2$ фута и скорость $U_0 = 30$ фут. в секунду.

Таким образом из опытных данных ясно, что формула (7) достаточно точно дает распределение скоростей в пограничном слое.

Подставляя полученное выражение для $u(y)$ в интегральное соотношение Кармана, мы получим после интегриации следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{U^2 \delta}{2} + \frac{U^2 U' \delta^3}{\pi \cdot \nu} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \right) + \frac{U^2 U'^2 \delta^5}{\pi^2 \nu^2} \left(\frac{3}{\pi^4} - \frac{1}{2\pi^2} - \frac{1}{10} \right) \right] - U \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2 U \delta}{\pi} + \frac{U U' \delta^3}{\pi \cdot \nu} \left(\frac{1}{\pi} - \frac{8}{\pi^3} \right) \right] = \delta U U' - \frac{\pi \nu}{2 \delta} \left(U + \frac{U U' \delta^2}{2 \pi \nu} \right). \quad (12)$$

Проводя дифференцирование и собирая члены с одинаковыми степенями δ , мы приведем уравнение (12) к более простой форме:

$$\frac{A \delta^6}{\nu^3} (U'^3 + U U' U'') + \frac{5 A \delta^5 \delta'}{\nu^3} U U'^2 + \frac{B \delta^4}{\nu^2} U'^2 + \frac{C \delta^4}{\nu^2} U U'' + \frac{D \delta^3 \delta'}{\nu^2} U U' + \frac{E \delta^2}{\nu} \cdot U' + \frac{F \delta \delta'}{\nu} \cdot U + 1 = 0 \quad (13)$$

где

$$A = \left[\frac{1}{10\pi^3} - \frac{2}{\pi^5} + \frac{12}{\pi^7} \right] = \sim \frac{2}{\pi^7}, \quad B = \left[\frac{2}{3\pi^2} - \frac{4}{\pi^4} - \frac{2}{\pi^3} + \frac{16}{\pi^5} \right] = \sim \frac{1,4}{\pi^4},$$

$$C = \left[\frac{1}{3\pi^2} - \frac{2}{\pi^4} - \frac{2}{\pi^3} + \frac{16}{\pi^5} \right] = \sim \frac{0,04}{\pi^4}, \quad D = \left[\frac{1}{\pi^2} - \frac{6}{\pi^4} - \frac{6}{\pi^3} + \frac{48}{\pi^5} \right] = \sim \frac{0,2}{\pi^4};$$

$$E = \left[\frac{1}{2\pi} - \frac{4}{\pi^2} \right] = -0,24; \quad F = \left[\frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^2} \right] = -0,08.$$

Таким образом задача сводится к интегрированию уравнения (13), из которого мы должны определить толщину пограничного слоя как $f(x, \nu, U, U', U'')$.

Уравнение (13) аналогично уравнению Польгаузена, но отличается от него коэффициентами при δ . Как мы уже указывали, это различие коэффициентов обусловлено несколько иными граничными условиями, налагаемыми на функцию $u(y)$, и совершенно другим выбором ее конструкции. Полученное уравнение (13) есть нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, решение которого возможно только приближенными приемами.

Основная мысль, которую мы положим в основу нового приближенного решения, заключается в следующем: будем считать за первое решение этого уравнения то решение, которое получается, если положить $U = \text{const}$; или физически: предположим, что в первом приближении закон нарастания толщины пограничного слоя следует закону

$$\delta_0 = 4,8 \sqrt{\frac{\nu \cdot x}{U}}$$

(который для пластинки выполняется совершенно точно). Ясно, что это предположение будет давать значительные отклонения от экспериментальных данных в области критической точки (точки разделения) потока.

Как будет видно из дальнейшего, это предположение для плавно обтекаемых контуров позволяет определить точку отрыва достаточно точно (ошибка менее 1%) и даже для плохо обтекаемых тел, как например цилиндр, эта ошибка не превышает 2%.

Таким образом можно сказать, что для целей практики вполне достаточно при решении уравнения (13) ограничиваться только первым приближением.

Второе приближение мы получим так.
Положим:

$$\delta_2 = \delta_0 + k\delta_0 = \delta_0(1 + k),$$

где k — достаточно малый неизвестный поправочный коэффициент, который мы определим, пользуясь уравнением (7).

Действительно, подставляя δ_2 в уравнение (7), мы получим линейное уравнение первого порядка относительно k , решение которого и определит нам

$$k = f(x).$$

Мы имеем, пренебрегая квадратами и высшими степенями, что:

$$\delta^6 = [\delta_0(1 + k)]^6 = \delta_0^6(1 + 6k),$$

$$\delta^4 = [\delta_0(1 + k)]^4 = \delta_0^4(1 + 4k),$$

$$\delta^2 = [\delta_0(1 + k)]^2 = \delta_0^2(1 + 2k),$$

$$\delta^5\delta' = [\delta_0(1 + k)]^5 [\delta_0(1 + k)]' = \delta_0^6 \frac{dk}{dx} + \delta_0^5 \delta_0' (1 + 6k),$$

$$\delta^3\delta' = [\delta_0(1 + k)]^3 [\delta_0(1 + k)]' = \delta_0^4 \frac{dk}{dx} + \delta_0^3 \delta_0' (1 + 4k),$$

$$\delta\delta' = [\delta_0(1 + k)] [\delta_0(1 + k)]' = \delta_0^2 \frac{dk}{dx} + \delta_0 \delta_0' (1 + 2k),$$

Зная, что

$$\delta_0 = 4,8 \sqrt{\frac{\gamma x}{U}} = h \sqrt{\frac{\gamma x}{U}},$$

получим

$$\delta_0^5 \delta_0' = \frac{\delta_0^4 h^2 \gamma (U - xU')}{2},$$

$$\delta_0^3 \delta_0' = \frac{\delta_0^2 h^2 \gamma (U - xU')}{2},$$

$$\delta_0 \delta_0' = \frac{h^2 \gamma (U - xU')}{2}.$$

Подставляя вычисленные значения в основное уравнение (13), получаем уравнение для определения

$$P(x) \frac{dk}{dx} + Q(x)k + R(x) = 0, \quad (14),$$

где

$$P(x) = \left[\frac{5Ah^6 x^3}{U^2} U'^2 + \frac{Dh^4 x^2}{U} U' + Fh^2 x \right];$$

$$Q(x) = \left[\frac{6Ah^6 x^3}{U^3} (U'^3 + UU'U'') + \frac{4Bh^4 x^2}{U^2} \cdot U'^2 + \frac{4Ch^2 x^2}{U^2} \cdot UU'' + \right. \\ \left. + \frac{2Eh^2 x}{U} \cdot U' + \frac{15Ah^6 x^2}{U} \cdot U'^2 (U - xU') + \frac{2Dh^4 x}{U} (U - xU') UU' + \right. \\ \left. + Fh^2 U (U - xU') \right];$$

и

$$R(x) = \left[\frac{Ah^6 x^3}{U^3} (U'^3 + UU'U'') + \frac{Bh^4 x^2}{U^2} \cdot U'^2 + \frac{Ch^4 x^2}{U} \cdot U'' + \right. \\ \left. + \frac{5Ah^6 x^2}{2U} U'^2 (U - xU') + \frac{Dh^4 x}{2} U' (U - xU') + \frac{Fh^2}{2} \cdot U (U - xU') + 1 \right].$$

Как известно, общее решение уравнения (14) можно представить в виде:

$$k = e^{-\int \frac{Q(x)}{P(x)} dx} \left[C - \int \frac{R(x)}{P(x)} \cdot e^{\int \frac{Q(x)}{P(x)} dx} dx \right], \quad (15)$$

что и определяет величину поправочного коэффициента. Ясно, что этот процесс последовательных приближений можно продолжить и далее, полагая

$$\delta_3 = \delta_2(1 + k_2),$$

$$\delta_4 = \delta_3(1 + k_3),$$

.....

однако, доказать сходимость этого процесса нам не удалось.

Заметим, что для целей практики нет необходимости проводить вычисления даже во втором приближении, пользуясь, например, формулой (15), так как результаты, даваемые первым приближением, настолько удовлетворительно подтверждаются экспериментом, что дальнейшее их улучшение имело бы только чисто математический интерес.

§ 5. Определение точки срыва струй

Наиболее важным результатом теории пограничного слоя является возможность определить точку срыва струй от поверхности обтекаемого тела. Место отрыва вполне определяется внешним потоком. Физически, как нетрудно видеть, для отрыва необходимо, чтобы вдоль стенки обтекаемого контура в направлении течения возникало увеличение давления; при увеличении давления свободного (потенциального) потока жидкости кинетическая энергия его отчасти переходит в потенциальную. Пограничный слой, вследствие наличия трения, теряет однако большую часть кинетической энергии, и ее оказывается уже недостаточно, чтобы частички жидкости, принадлежащие пограничному слою, могли продвинуться в область высоких давлений; по этой причине в пограничном слое возникает обратный ток жидкости, и поток отходит от стенки. Координата точки отрыва (обычно угол φ) определяется по Л. Прандтлю тем условием, что в месте отрыва касательная к профилю скоростей в начальной точке нормальна к контуру обтекаемого тела (фиг. 5).

Математически это значит, что в точке срыва

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0. \quad (16)$$

При нашем выборе функции $u(y)$ условие (16) дает:

$$\frac{U' \delta^2}{\nu} + 2\pi = 0$$

или

$$\boxed{\frac{U' \delta^2}{\nu} = -2\pi} \quad (17)$$

Для первого приближения формула (17) преобразуется к еще более удобному виду. Действительно, как мы уже указывали, можно в качестве первого решения уравнения (13) взять

$$\delta = 4,8 \sqrt{\frac{\nu \cdot x}{U}},$$

тогда условие отрыва (17) примет вид:

$$\frac{(4,8)^2 \cdot U' \cdot x}{U} = -2\pi \quad (18)$$

Применим дальше (18) для нахождения точек срыва струй с круглого и эллиптического цилиндров.

§ 6. Круглый цилиндр

Для экспериментальной проверки полученных результатов найдем точку срыва струй у кругового цилиндра, для которого известно действительное (не потенциальное) распределение скоростей на внешней границе контура.

Мы воспользуемся для этой цели опытными данными К. Гименца*, который исследовал поток около кругового цилиндра диаметром 9,75 см при скорости потока $U_0 = 19$ см/сек.

В своей работе Гименц указывает, что экспериментальное распределение скоростей вдоль контура можно представить формулой

$$U = 7,151x - 0,04497x^3 - 0,00033x^5,$$

где x — длина дуги.

На основании формулы (18) имеем

$$(4,8)^2 x (7,151 - 0,135x^2 - 0,00165x^4) = -2\pi (7,151x - 0,04497x^3 - 0,00033x^5)$$

или

$$33,252 - 0,5374x^2 - 0,00635x^4 = 0,$$

откуда находим

$$x_{\text{отр}} = 6,72$$

и следовательно угол отрыва

$$\varphi = \frac{6,72}{4,874} = 1,41 \text{ радиана},$$

т. е.

$$\varphi_{\text{отр}} = 81^\circ$$

(19)

Экспериментальные наблюдения Гименца дают $\varphi_{\text{отр}} = 82^\circ$.

Таким образом даже для плохо обтекаемого контура первое приближение дает вполне удовлетворительный результат.

Определим далее точку отрыва струй на круговом цилиндре, исходя из потенциального распределения скоростей.

Распределение же скоростей вдоль контура кругового цилиндра легко получить, зная характеристическую функцию течения, которая имеет вид:

$$W(z) = A \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right).$$

Дифференцируя, определяя постоянную A и полагая

$$z = r_0 e^{i\varphi}$$

* Hiemenz K. Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszylinder. Dissert. Göttingen, 1911.

мы найдем, что

$$U = 2 V_{\infty} \sin \varphi. \quad (19')$$

Подставляя это значение U в формулу (18), получим:

$$\varphi \cdot \operatorname{ctg} \varphi = -0,27.$$

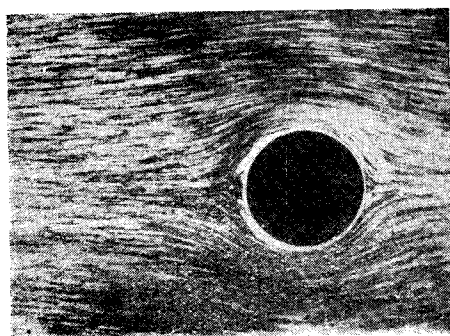
Так как ряд для $\operatorname{ctg} \varphi$ сходится в области $0 < |\varphi| < \pi$, то, представив $\operatorname{ctg} \varphi$ через ряд и ограничиваясь первыми тремя членами, получим:

$$\varphi \left[\frac{1}{\varphi} - \left(\frac{\varphi}{3} + \frac{\varphi^3}{45} \right) \right] = -0,27.$$

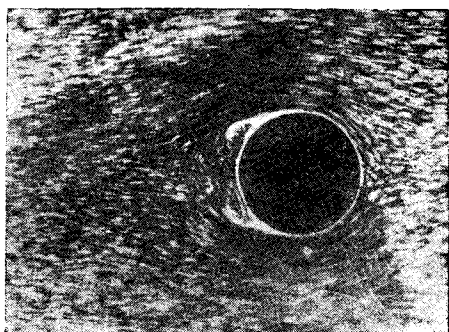
Отсюда

$$\varphi_2 = 102^\circ.$$

Какой же угол отрыва дает в этом случае эксперимент?



Фиг. 6.



Фиг. 7.

Из приводимых здесь фотографий Прандтля — Титъенса* (фиг. 6 и 7) ясно видно, что поток, который вначале очень близок к потенциальному, начинает отходить от стенки при $\varphi = 114 - 116^\circ$, поэтому наиболее правильным теоретическим результатом в этом случае нужно считать $\varphi = 115^\circ$. Эксперимент показывает, что эта первоначальная точка отрыва перемещается, с увеличением вихрей, от $\varphi = 115^\circ$ к $\varphi = 82^\circ$, но совершенно ясно, что, исходя из потенциального распределения скоростей вдоль контура и пользуясь условием отрыва (16), мы должны получить ту точку на контуре, где поток начинает отходить от стенки цилиндра при образовании первой пары вихрей.

Вычислим для этого случая второе приближение, считая что $\cos \varphi_1$ мал, а $\sin \varphi_1 = 1$, пренебрегая квадратами $\cos \varphi_1$, тогда на основании формулы (15) найдем

$$k = -\frac{1}{3}.$$

Следовательно

$$\delta_2 = 3,2 \sqrt{\frac{\nu \cdot x}{U}}.$$

* Prandtl und Tietjens. Hydro und Aeromechanik. Bd. II.

Подставляя это значение δ_2 в формулу (17) и проводя все вычисления, получим, что угол отрыва

$$\varphi_2 = \sim 113^\circ,$$

что хорошо согласуется с опытами Прандтля-Титьенса и теоретическими результатами Блазиуса* и Лойцянского**.

§ 7. Эллиптический цилиндр

Для определения точки срыва струй для эллиптического цилиндра прежде всего нужно найти распределение скоростей потенциального, потока вдоль контура цилиндра.

Как известно, для построения потока в области, внешней эллипсу, достаточно знать конформную связь с областью, внешней кругу, и характеристическую функцию, дающую поток около круга.

Желая в дальнейшем найти точки срыва для углов атаки, отличных от нулевого, мы возьмем характеристическую функцию, дающую поток около кругового цилиндра в виде:

$$W(\zeta) = V_\infty e^{i\theta} \left(\zeta + \frac{r_0^2 e^{-2i\theta}}{\zeta} \right)$$

где r_0 — радиус круга, а θ — угол атаки.

Функция, устанавливающая конформную связь между плоскостью (ζ) и плоскостью (Z), причем контур в плоскости (Z) представляет эллипс, будет:

$$Z = \left(\zeta + \frac{p^2}{\zeta} \right),$$

где

$$p^2 = \text{const} < r_0^2$$

так что

$$\frac{p^2}{r_0^2} < 1.$$

Скорость в какой-нибудь точке области (Z) будет вычисляться по формуле:

$$v = u - iv = \frac{dW}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = \frac{V_\infty e^{i\theta} \left(1 - \frac{r_0^2}{\zeta^2} \right)}{\left(1 - \frac{p^2}{\zeta^2} \right)}. \quad (20)$$

Полагая

$$\frac{p^2}{r_0^2} = \lambda^2$$

и

$$\zeta = r_0 e^{i\varphi},$$

* Blasius H. Grenzsichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Zeits. f. Math u. Phys. Bd. 58. 1908.

** Лойцянский Л. Г. Определение точки срыва на цилиндре. Журнал прикладной математики и механики. 1933.

мы получим из (20) скорость вдоль контура эллипса

$$v = \frac{1 - e^{-2i(\varphi + \theta)}}{1 - \lambda^2 e^{-2i\varphi}},$$

откуда

$$V^2 = \frac{4V_\infty^2 \sin^2(\theta + \varphi)}{1 + \lambda^4 - 2\lambda^2 \cos 2\varphi}. \quad (21)$$

Из конформной связи областей имеем параметрическое уравнение эллипса в виде:

$$\begin{aligned} x &= r_0(1 + \lambda^2) \cos \varphi, \\ y &= r_0(1 - \lambda^2) \sin \varphi, \end{aligned}$$

т. е. полуоси эллипса выражаются через параметры преобразования так:

$$\begin{aligned} a &= r_0(1 + \lambda^2), \\ b &= r_0(1 - \lambda^2), \end{aligned}$$

откуда

$$\lambda^2 = \frac{a - b}{a + b}.$$

Очевидно, что в случае $\lambda = 0$ (круговой цилиндр) формула (21) дает известную формулу распределения скоростей (19').

Подставляя полученное значение U (формула 21) в формулу (18), найдем, что условие отрыва для эллиптического цилиндра напишется так:

$$\frac{[(1 + \lambda^4 - 2\lambda^2 \cos^2 \varphi) \cos(\varphi + \theta) - 2\lambda^2 \sin 2\varphi \sin(\varphi + \theta)] \cdot (4,8)^2 \cdot S}{\sin(\varphi + \theta) [1 + \lambda^4 - 2\lambda^2 \cos 2\varphi] \cdot S' \varphi} = 2\pi, \quad (22)$$

где S — длина дуги $S' \varphi = \frac{dS}{d\varphi}$ [для избежания неясностей мы пишем в (22) S вместо x , написанного в (18)].

Разделив левую часть (22) почленно, получим расчетную формулу в виде:

$$\operatorname{ctg}(\varphi + \theta) - \frac{2\lambda^2 \sin 2\varphi}{1 + \lambda^4 - 2\lambda^2 \cos 2\varphi} = - \frac{0,273 \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}}{\int_0^\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} \cdot d\varphi}; \quad (23)$$

так как длина дуги эллипса

$$S = \int_0^\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} \cdot d\varphi,$$

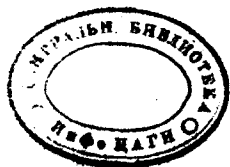
$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Разберем сначала два частных случая.

1) Круговой цилиндр $a = b$, $\lambda^2 = 0$ и пусть $\theta = 0^\circ$.
Условие отрыва (23) переписывается тогда в виде:

$$\varphi \cdot \operatorname{ctg} \varphi = -0,273,$$

т. е. совпадает с ранее полученным решением.



2) Пластика

$$\lambda^2 = 1$$

Имеем из (23)

$$2\pi \sin \varphi = 0,$$

откуда

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi,$$

т. е. отрыва нет.

Переходя теперь к вычислению точки отрыва на эллиптическом цилиндре, пользуясь (23), сделаем еще некоторые замечания.

Вычисления длины дуги S не представляют никаких затруднений, так как заменой φ на $90 - \psi$ этот интеграл сводится к эллиптическому интегралу второго рода, так что его значения можно взять в таблицах с достаточной степенью точности.

Задаваясь определенным соотношением $\frac{a}{b}$ и обозначая

$$\Phi = \operatorname{ctg}(\varphi + \theta) - \frac{2\lambda^2 \sin 2\varphi}{1 + \lambda^4 - 2\lambda^2 \cos 2\varphi}$$

$$F = - \frac{0,273 \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}}{(4,8)^2 \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} d\varphi},$$

мы, проводя вычисления, графически находим значение угла отрыва для интересующих нас случаев (фиг. 8—12).

Как видно из предыдущих формул, от изменения угла атаки меняется только Φ , и на приводимых чертежах Φ_5 , Φ_{10} означает величину Φ при $\theta = 5^\circ$ и $\theta = 10^\circ$ соответственно.

При вычислении точки отрыва при угле атаки, отличном от нулевого, мы сделали еще одно приближение: именно мы считали, что точка разделения потока (так наз. критическая точка) находится на действительной оси. Однако это допущение влияет на результат очень мало, так как при выбранном изменении θ критическая точка смещается не больше 3° .

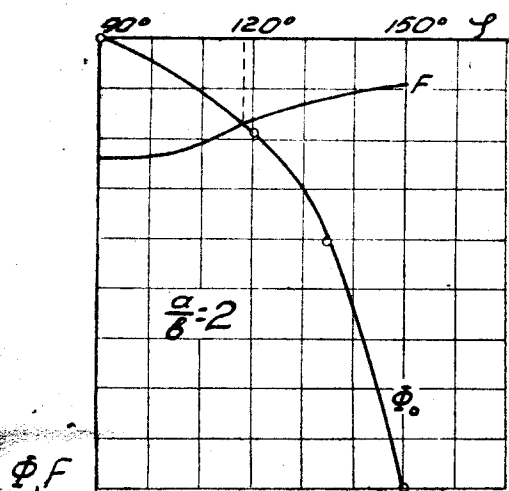
Найденное по графикам значение φ не будет однако углом отрыва на эллиптическом цилиндре, а будет углом отрыва на отображаемом круговом цилиндре. Находя из конформной связи областей (z) и (ζ) соответствующую точку на эллиптическом цилиндре по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi_{\text{эл}} = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi_{\text{цил}},$$

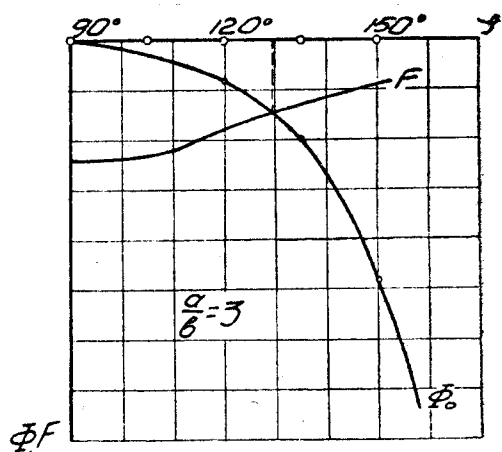
мы легко определим угол отрыва φ и на эллиптическом цилиндре.

Мы провели цифровой расчет для следующих соотношений между полуосями:

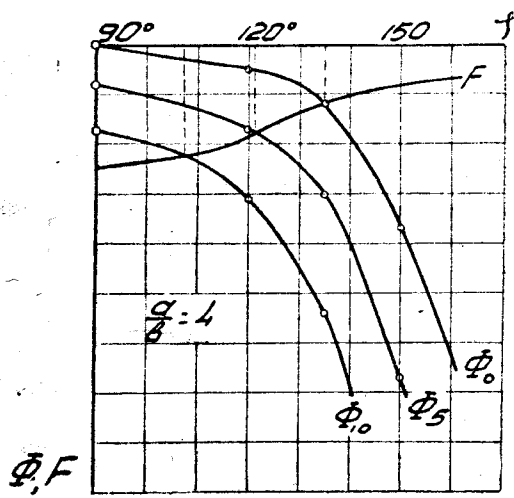
- | | | |
|----|--------------------|------------|
| 1) | $\frac{a}{b} = 2$ | (фиг. 8), |
| 2) | $\frac{a}{b} = 3$ | (фиг. 9), |
| 3) | $\frac{a}{b} = 4$ | (фиг. 10), |
| 4) | $\frac{a}{b} = 5$ | (фиг. 11), |
| 5) | $\frac{a}{b} = 10$ | (фиг. 12), |



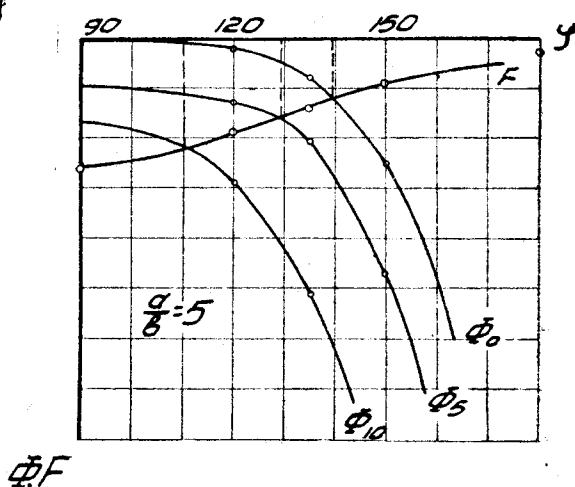
Фиг. 8.



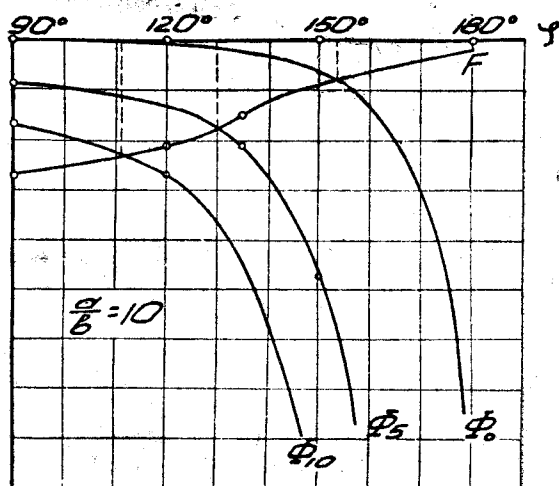
Фиг. 9.



Фиг. 10.



Фиг. 11.



Фиг. 12.

и получили для $\theta=0^\circ$:

1) при $\frac{a}{b}=2$

$\varphi_{\text{отр}} = 136^\circ$,

2) при $\frac{a}{b}=3$

$\varphi_{\text{отр}} = 157^\circ 30'$,

3) при $\frac{a}{b}=4$

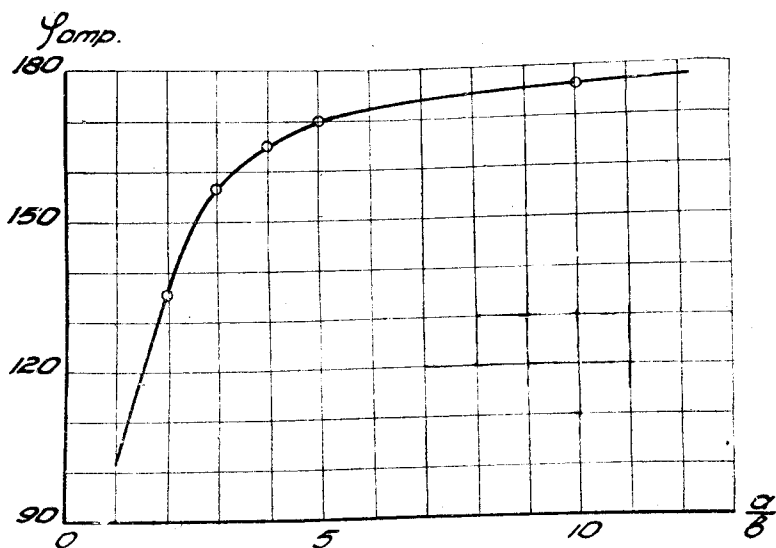
$\varphi_{\text{отр}} = 166^\circ$,

4) при $\frac{a}{b}=5$

$\varphi_{\text{отр}} = 170^\circ$,

5) при $\frac{a}{b}=10$

$\varphi_{\text{отр}} = 177^\circ$,



Фиг. 13.

Для $\theta=5^\circ$

1) при $\frac{a}{b}=4$

$\varphi_{\text{отр}} = 156^\circ 30'$

2) при $\frac{a}{b}=5$

$\varphi_{\text{отр}} = 166^\circ$,

3) при $\frac{a}{b}=10$

$\varphi_{\text{отр}} = 173^\circ$,

и для $\theta=10^\circ$

1) при $\frac{a}{b}=4$

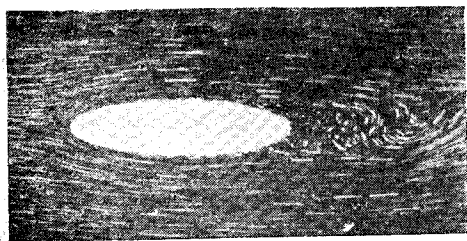
$\varphi_{\text{отр}} = 151^\circ$

2) при $\frac{a}{b}=5$

$\varphi_{\text{отр}} = 151^\circ$,

3) при $\frac{a}{b}=10$

$\varphi_{\text{отр}} = 165^\circ$,



Фиг. 14.

В заключение мы приводим график зависимости угла отрыва от отношения $\frac{a}{b}$.

Пользуясь им, можно найти для нулевого угла атаки величину угла отрыва (фиг. 13).

К сожалению, мы в настоящее время не располагаем снимками спектров обтекания эллиптических цилиндров, за исключением одного, помещенного в Handbuch der Experim. Physik. Bd. IV. t. I, который мы и воспроизводим на фиг. 14.

Угол отрыва здесь приблизительно равен 162° , по нашим расчетам (фиг. 13) для данного отношения полуосей $\varphi=164^\circ$.

Как видно, совпадение с экспериментом вполне удовлетворительное.

II. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПРОФИЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ РУЛЯ ЖУКОВСКОГО

§ 1. Постановка задачи

Весьма многочисленные эксперименты и отзывы практических работников авиации дают все основания думать, что профили крыльев, известных под названием „крылья типа инверсии параболы“, являются очень выгодными в аэродинамическом и конструктивном отношениях. Различные модификации этих крыльев применяются в качестве рабочих профилей воздушных гребных винтов и вентиляторов. И если для этого типа крыльев вопрос о теоретическом подсчете подъемной силы и индуктивного сопротивления может считаться решенным удовлетворительно многочисленными работами русской школы Жуковского-Чаплыгина и иностранными исследованиями школы Прандтля-Глауэрта, то задача о профильном сопротивлении в настоящее время еще не имеет достаточно удовлетворительного теоретического решения.

В настоящей работе мы хотим выяснить, исходя из основных идей теории пограничного слоя, новую методику подсчетов профильного сопротивления частного типа крыльев Жуковского, именно для так называемых крыльев типа „руля НЕЖ“, которые суть не что иное, как симметричные профили типа инверсии параболы.

Полное сопротивление движению крыла конечного размаха в маловязкой жидкости (воздух) можно разложить на три части.

1. Сопротивление трения — эта часть общего сопротивления крыла обусловлена значительным влиянием вязкости в пограничном слое, благодаря большому градиенту скорости, и она составляется из тангенциальных напряжений, возникающих при обтекании крыла воздушным потоком.

2. Сопротивление индуктивное — эта часть общего сопротивления обусловлена конечностью крыла — сходящими с концов крыла вихревыми жгутами.

3. Сопротивление вихревое — эта часть сопротивления возникает при нарушении плавности обтекания профиля крыла, образовании срыва струй с поверхности его с последующим завихрением и образованием так называемой Кармановской вихревой дорожки.

Ясно, что и вихревое и индуктивное сопротивления связаны с вихреобразованиями около крыла, но мы находим указанное подразделение общего сопротивления целесообразным потому, что при теоретическом подсчете мы будем исходить из уравнений для плоско-параллельного потока и, естественно, в этом случае индуктивное сопротивление исчезает.

В работе мы всюду будем понимать под профильным сопротивлением крыла только сопротивление трения.

Для теоретического подсчета сопротивления трения необходимо знать:

- а) закон распределения скоростей в пограничном слое около крыла;
- б) место срыва струй от поверхности крыла.

Общетеоретические предпосылки к этой работе изложены в предыдущей главе.

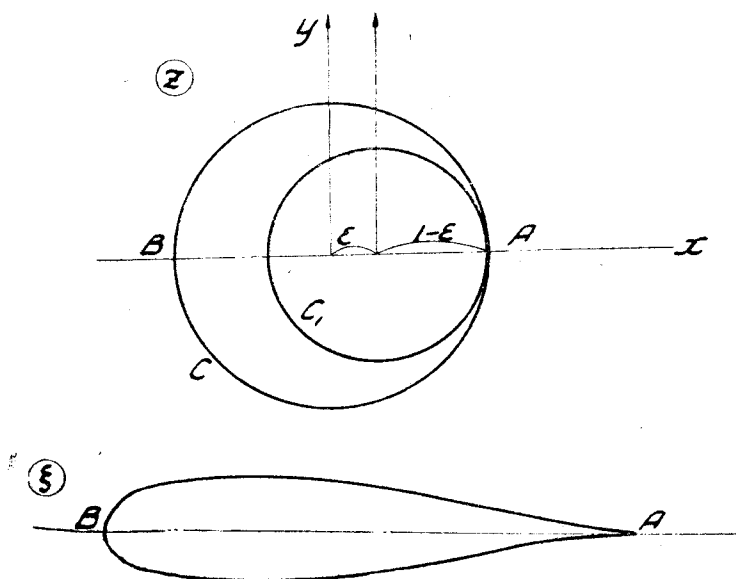
§ 2. Построение потенциального потока около руля Жуковского

Как мы уже указывали в нашей первой статье, для определения точки срыва струй нужно прежде всего знать потенциальный поток около данного контура. Чтобы найти характеристическую функцию, дающую поток около крыла типа руля Жуковского, достаточно знать конформную связь двух областей комплексного переменного (Z) и (ζ) (в области Z имеем окружность, а в области ζ интересующий нас профиль) и поток, обтекающий окружность в плоскости (Z).

Отобразим конформно внешнюю часть плоскости (Z_1), ограниченную окружностью радиуса $(1 - \varepsilon)$ (фиг. 1) помощью формулы

$$\zeta_1 = Z_1 + \frac{(1 + \varepsilon)^2}{Z_1}; \quad (1)$$

мы получим тогда в области (ζ_1) пластинку длины $4(1 - \varepsilon)$.



Фиг. 1.

Построим в плоскости (Z_1) окружность C радиуса $= 1$, касающуюся окружности в точке A . На плоскости ζ_1 эта окружность перейдет в контур руля Жуковского*.

Перенесем, далее, начало координат на плоскости (Z_1) в точку O ; центр окружности C тогда, очевидно, будем иметь:

$$Z = Z_1 + \varepsilon$$

и следовательно

$$Z_1 = Z - \varepsilon,$$

тогда формула (1) примет вид

$$\zeta = (Z - \varepsilon) + \frac{(1 - \varepsilon)^2}{Z - \varepsilon}. \quad (2)$$

Очевидно, значению $Z = 1$ в плоскости ζ должна соответствовать точка A с координатой $\zeta = 2(1 - \varepsilon)$.

* В. В. Голубев. Исследования по теории разрезного крыла. Часть 1-я. Труды ЦАГИ, вып. 147, 1933.

Действительно из (2) имеем:

$$\zeta_A = (1 - \varepsilon) + \frac{(1 - \varepsilon)^2}{1 - \varepsilon} = 2(1 - \varepsilon).$$

Точке $Z = -1$ должна соответствовать точка B , носик крыла и

$$|\zeta_B| > 2(1 - \varepsilon);$$

из (2) имеем

$$\zeta_B = -\frac{2(1 + \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon} = -2(1 - \varepsilon + 2\varepsilon^2 + \dots),$$

т. е. для тонких крыльев типа руля НЕЖ хорда крыла почти в точности равна $4(1 - \varepsilon)$.

Положим

$$Z = e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

тогда

$$\zeta = \cos \varphi - \varepsilon + i \sin \varphi + \frac{(1 - \varepsilon)^2}{(\cos \varphi - \varepsilon) + i \sin \varphi}. \quad (3)$$

Разделяя действительную и мнимую часть, получим параметрическое уравнение контура руля НЕЖ в виде:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= (\cos \varphi - \varepsilon) + \frac{(1 - \varepsilon)^2 (\cos \varphi - \varepsilon)}{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \varphi} \\ \eta &= \sin \varphi - \frac{(1 - \varepsilon)^2 \sin \varphi}{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Построим теперь поток, обтекающий руль, и вычислим скорость этого потока вдоль поверхности крыла.

Как известно, характеристическая функция обтекания круглого цилиндра с циркуляцией имеет вид:

$$W(z) = V_\infty e^{i\theta} \left(z + \frac{e^{-2i\theta}}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \lg ze^{i\theta}. \quad (5)$$

Согласно основной гипотезы Жуковского: при $z = 1, \frac{dw}{dz} = 0$, т. е. точкой схода струй является задняя кромка крыла, следовательно:

$$\frac{dw}{dz} = V_\infty e^{i\theta} \left(1 - \frac{e^{-2i\theta}}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z},$$

а

$$\left(\frac{dw}{dz} \right)_{z=1} = V_\infty e^{i\theta} \left(1 - e^{-2i\theta} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i},$$

отсюда

$$\frac{\Gamma}{2\pi i} = -V_\infty e^{i\theta} \left(1 - e^{-2i\theta} \right). \quad (6)$$

Скорость вдоль цилиндра, принимая (6), будет

$$\frac{dw}{dz} = V_\infty e^{i\theta} \left[\left(1 - \frac{e^{-2i\theta}}{z^2} \right) - \frac{1}{z} \left(1 - e^{-2i\theta} \right) \right]$$

или

$$\frac{dw}{dz} = V_\infty e^{i\theta} \left[\frac{z-1}{z} \cdot \left(\frac{z+e^{-2i\theta}}{z} \right) \right]. \quad (7)$$

Ранее мы установили, что конформная связь областей (z) и (ζ) имеет вид

$$\zeta = (z - \varepsilon) + \frac{(1 - \varepsilon)^2}{z - \varepsilon}$$

и следовательно

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{(z - \varepsilon)^2 - (1 - \varepsilon)^2}{(z - \varepsilon)^2}. \quad (8)$$

Скорость вдоль поверхности крыла будет вычисляться по формуле:

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{d\zeta} \quad (9)$$

Подставляя (7) и (8) в (9), получим:

$$\frac{dw}{d\zeta} = V_{\infty} e^{i\theta} \left[\frac{z-1}{z} \cdot \frac{z+e^{-2i\theta}}{z} \right] \cdot \frac{(z-\varepsilon)^2}{(z-\varepsilon)^2 - (1-\varepsilon)^2} \quad (10)$$

Полагая здесь $z = e^{i\varphi}$ и зная, что

$$U^2 = \frac{dw}{d\zeta} \cdot \frac{dw}{d\zeta},$$

где $\frac{dw}{d\zeta}$ — сопряженная комплексная скорость, мы получим из (10) следующее выражение для квадрата скорости вдоль поверхности крыла:

$$\left[U^2 = V_{\infty}^2 \frac{e^{i\varphi} - 1)(e^{i\varphi} + e^{-2i\theta})(e^{-i\varphi} - 1)(e^{-i\varphi} + e^{2i\theta})}{e^{2i\varphi} \cdot e^{-2i\varphi}} \right] \cdot \left[\frac{(e^{i\varphi} - \varepsilon)^2 (e^{-i\varphi} - \varepsilon)^2}{[(e^{i\varphi} - \varepsilon)^2 - (1 - \varepsilon)^2][(e^{-i\varphi} - \varepsilon)^2 - (1 - \varepsilon)^2]} \right]$$

Но, как следует из подсчетов:

$$\frac{(e^{i\varphi} - 1)(e^{i\varphi} + e^{-2i\theta})(e^{-i\varphi} - 1)(e^{-i\varphi} + e^{2i\theta})}{e^{2i\varphi} \cdot e^{-2i\varphi}} = 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot 4 \cos^2 \left(\theta - \frac{\varphi}{2} \right),$$

а

$$\left[\frac{(e^{i\varphi} - \varepsilon)^2 (e^{-i\varphi} - \varepsilon)^2}{[(e^{i\varphi} - \varepsilon)^2 - (1 - \varepsilon)^2][(e^{-i\varphi} - \varepsilon)^2 - (1 - \varepsilon)^2]} \right] = \frac{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \varphi}{4 [\sin^2 \varphi - 2\varepsilon \sin^2 \varphi + 2\varepsilon^2 (1 - \cos \varphi)]},$$

откуда

$$U^2 = 4V_{\infty}^2 \cos^2 \left(\theta - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{(1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \varphi)^2}{(1 - 2\varepsilon) \sin^2 \varphi + 2\varepsilon^2 (1 - \cos \varphi)}$$

или окончательно

$$\boxed{U^2 = V_{\infty}^2 \cos^2 \left(\theta - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \frac{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \varphi}{(1 - 2\varepsilon) \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \varepsilon^2}} \quad (11)$$

В дальнейших вычислениях нам все время придется пользоваться формулой (11). При $\varepsilon = 0$ получаем выражение для скорости вдоль пластинки, плавно обтекаемой и поставленной под углом θ к потоку

$$U = \frac{V_{\infty} \cos \left(\theta - \frac{\varphi}{2} \right)}{\cos \frac{\varphi}{2}}.$$

§ 3. Вычисление длины дуги руля НЕЖ

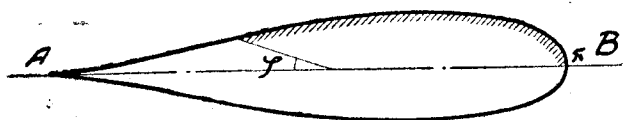
Раньше мы получили параметрическое уравнение профиля руля Жуковского в виде:

$$\xi = (\cos \varphi - \varepsilon) + \frac{(1 - \varepsilon)^2 (\cos \varphi - \varepsilon)}{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \varphi}, \quad (4)$$

$$\eta = \sin \varphi - \frac{(1 - \varepsilon)^2 \sin \varphi}{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \varphi}.$$

По общеизвестной формуле имеем (фиг. 2):

$$S = \int_{\pi}^{\varphi} \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}.$$



Фиг. 2.

Но из (4) путем элементарных вычислений имеем:

$$d = \left[-\sin \varphi + \frac{(1 - \varepsilon)^2 [-\sin \varphi (1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \varphi) - 2\varepsilon \sin \varphi (\cos \varphi - 2)]}{(1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \varphi)^2} \right] d\varphi$$

$$d\eta = \left[\cos \varphi - \frac{(1 - \varepsilon)^2 [\cos \varphi (1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \varphi) - 2\varepsilon \sin^2 \varphi]}{(1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \varphi)^2} \right] d\varphi,$$

а следовательно:

$$ds^2 = \frac{1}{A^2} \left[A^2 + 2(1 - \varepsilon)^2 (2 \sin^2 \varphi - A) + (1 - \varepsilon)^4 \right] d\varphi,$$

где для сокращения положено:

$$A = 1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \varphi,$$

откуда длина дуги представится в виде:

$$S = \int_{\pi}^{\varphi} \frac{1}{A} \cdot \sqrt{[A - (1 - \varepsilon)^2]^2 + 4(1 - \varepsilon)^2 \sin^2 \varphi} \cdot d\varphi. \quad (12)$$

В общем случае этот интеграл не выражается через элементарные функции, но для некоторых интересных частных случаев интегрирование можно выполнить достаточно точно.

Заметим прежде всего, что

$$A - (1 - \varepsilon)^2 = 4\varepsilon \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

и следовательно:

$$S = \int_{\pi}^{\varphi} 4 \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{1}{A} \cdot \sqrt{\varepsilon^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + (1 - \varepsilon)^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} \cdot d\varphi$$

Подкоренное выражение можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + (1 - \varepsilon)^2 \left(1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) &= (1 - \varepsilon)^2 + \sin^2 \frac{\varphi}{2} \left[\varepsilon^2 - (1 - \varepsilon)^2 \right] = \\ &= (1 - \varepsilon)^2 - (1 - 2\varepsilon) \sin^2 \frac{\varphi}{2} \end{aligned}$$

и мы получим окончательно

$$S = \int_{\pi}^{\frac{\varphi}{2}} \frac{4(1-\varepsilon)}{A} \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1-2\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi. \quad (13)$$

В нашей работе исследуются профили, для которых разность радиусов отображаемых кругов $\varepsilon = 0,05$; $\varepsilon = 0,1$; $\varepsilon = 0,5$.

Для профиля с $\varepsilon = 0,05$ мы можем пренебречь ε^2 , а тогда

$$S = \int_{\pi}^{\frac{\varphi}{2}} \frac{2(1-\varepsilon) \sin \varphi d\varphi}{A}$$

заменой переменных интеграл сводится к элементарному, и мы получаем

$$S = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \ln \frac{A}{(1+\varepsilon)^2}. \quad (14)$$

Точно так же в случае $\varepsilon = 0,5$ мы сведем (13) к виду

$$S = \int_{\pi}^{\frac{\varphi}{2}} \frac{4(1-\varepsilon) \sin \frac{\varphi}{2} \cdot d\varphi}{(1+\varepsilon)^2 - 4\varepsilon \cos^2 \frac{\varphi}{2}},$$

что после интегрирования дает:

$$S = -\frac{2}{k} \ln \frac{k + 2 \cos \frac{\varphi}{2}}{k - 2 \cos \frac{\varphi}{2}},$$

где

$$k = \sqrt{4,5}.$$

Для $\varepsilon = 0,1$ нам пришлось взять интеграл графически.

§ 4. Определение точки срыва струй

В предыдущей статье нами было выяснено, что для хорошо обтекаемых тел условие срыва

$$\frac{U' \delta^2}{\nu} = -2\pi \quad (15)$$

принимает очень простую форму

$$\frac{(4,8)^2 U'_{\varphi} \cdot S}{S'_{\varphi} U} = -2\pi, \quad (16)$$

так как в этом случае

$$\delta^2 = (4,8)^2 \cdot \frac{\nu \cdot S}{U}.$$

На основании (16) мы тотчас же получим уравнение, из которого и определим угол отрыва струй.

Распределение скоростей вдоль поверхности крыла имеет вид:

$$U^2 = V_{\infty}^2 \cos^2 \left(\theta - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \frac{A^2}{B},$$

где

$$A = 1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \varphi, \quad B = (1 - 2\varepsilon) \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \varepsilon^2.$$

Продифференцируем скорость по дуге S , получим

$$2UU_s' = \frac{A}{B} \cos\left(\theta - \frac{\varphi}{2}\right) \left[A \sin\left(\theta - \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{1}{B} \cos\left(\theta - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin \varphi \cdot \left(4B\varepsilon + \frac{1}{2}A - \varepsilon A\right) \right] \cdot \frac{d\varphi}{ds}.$$

Кроме того из (13)

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{4(1-\varepsilon) \sin \frac{\varphi}{2}}{A} \cdot \sqrt{1 - \frac{(1-2\varepsilon)}{(1-\varepsilon)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Условие отрыва (16) теперь напишется в виде:

$$\boxed{\frac{A \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} - \theta\right)}{\sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{2\pi}{(4,8)^2} \cdot \frac{4(1-\varepsilon) \sqrt{1 - \frac{1-2\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}{\int_{\pi}^{\varphi} \frac{C}{A} \cdot d\varphi} +} \quad (17)$$

$$+ 8\varepsilon \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{(1-2\varepsilon) \cos \frac{\varphi}{2} \cdot A}{B}.$$

Разберем два частных случая.

1) Круговой цилиндр. Для него $\varepsilon = 1$ и кроме того положим $\theta = 0$, тогда

$$A = 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad B = \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad C = A.$$

Условие отрыва (17) дает в этом случае

$$(4,8)^2 (\varphi - \pi) \operatorname{ctg} \varphi = -2\pi,$$

т. е. получим формулу для кругового цилиндра, подробно рассмотренную нами в предыдущей статье, с той только разницей, что теперь мы ведем отсчет углов от точки схода струй потенциального течения (задней кромки крыла-хвостика), в то время как раньше мы отсчитывали углы от точки разветвления потока.

2) Плоская пластинка под углом θ к потоку.
В этом частном случае

$$\varepsilon = 0, \quad A = 1, \quad B = \cos^2 \frac{\varphi}{2} \quad \text{и} \quad C = 2 \sin \varphi$$

Условие отрыва (17) дает здесь

$$(4,8)^2 (\cos \varphi - 1) \sin \varphi = 4\pi \sin \varphi \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos\left(\theta - \frac{\varphi}{2}\right) \quad (18)$$

и для $\theta = 0$ видно, что обтекание будет безотрывным.

Заметим, что для $\theta \neq 0$ вычисления по формуле (17) не дадут удовлетворительного результата, так как при $\varphi = \pi$ мы имеем бесконечно большую скорость, что физически нереально.

§ 5. Вычисления положения точек срыва струй для серии профилей типа руля НЕЖ

Так как для различных рулей Жуковского единственный параметр, влияющий на положение точки срыва струй, будет разность радиусов отображаемых окружностей S и S_1 , то мы и провели все расчеты для различных значений этого параметра. Наибольший интерес для нас представляли те профили, для которых происходит безотрывное обтекание, или те, для которых угол отрыва настолько мал, что им можно было бы пренебречь; потому что для них полное лобовое сопротивление при бесконечном размахе будет только сопротивление трения.

При всех предыдущих выкладках мы, следуя проф. В. В. Голубеву, брали отношение радиуса меньшей окружности к большей в виде:

$$\frac{r}{R} = 1 - \varepsilon;$$

очень часто при теоретическом построении профилей берут отношение радиуса большей окружности к меньшей в виде:

$$\frac{R}{r} = 1 + \varepsilon_1.$$

Легко выразить ε через ε_1 и наоборот. Действительно имеем, что

$$(1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon_1) = 1,$$

откуда

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{1 + \varepsilon_1}; \quad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}.$$

Так как максимальную толщину тонкого профиля руля можно вычислять по формуле*

$$t_{\max} = \frac{4r^3 V}{4} \cdot \varepsilon_1,$$

а длина хорды на основании предыдущего напишется в виде:

$$\zeta_A - \zeta_B = 2(1 - \varepsilon) + \frac{2(1 + \varepsilon^2)}{1 - \varepsilon} = \frac{4}{1 - \varepsilon},$$

то мы можем, для более привычной характеристики профилей, давать их толщину не через разность радиусов ε , а в процентах хорды.

Для справок мы даем на фиг. 3 зависимость толщины профиля в проценте хорды от параметра отображения ε .

Для выбранных нами расчетных случаев имеем:

- 1) при $\varepsilon = 0,05$ профиль 7% толщины
- 2) при $\varepsilon = 0,1$ " 14% "
- 3) при $\varepsilon = 0,5$ " 62% "

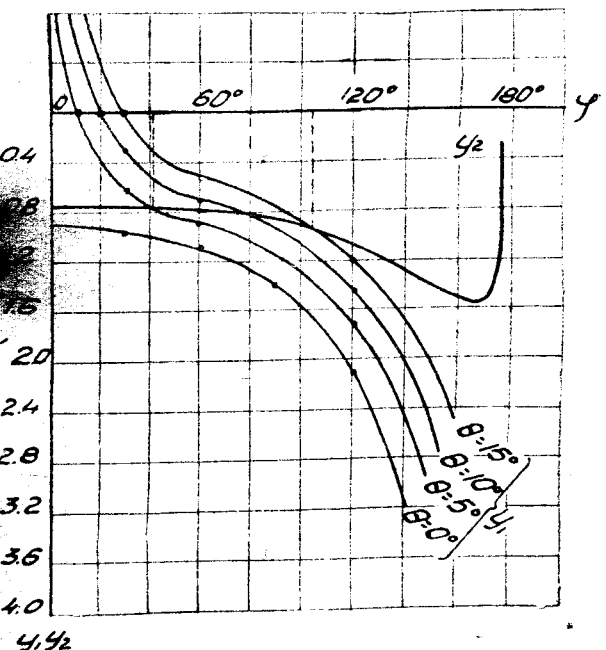
Вычисления длины дуги для $\varepsilon = 0,1$ проводим графическим способом, что при достаточно большом масштабе провести легко и расчеты могут быть выполнены с большой степенью точности. Ниже мы приводим полностью

* Глауэрт. Основы теории крыльев и винта. ГИЗ. М. 1931.

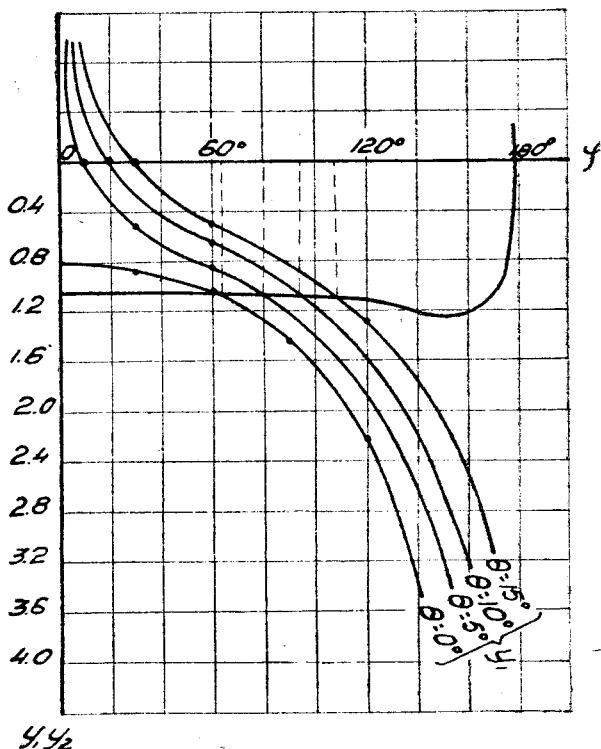
все расчеты для тонкого профиля $\varepsilon=0,05$ и графическое определение угла отрыва для всех выбранных профилей (фиг. 4, 5 и 6).

Руль при $\varepsilon=0,05$. Длина дуги

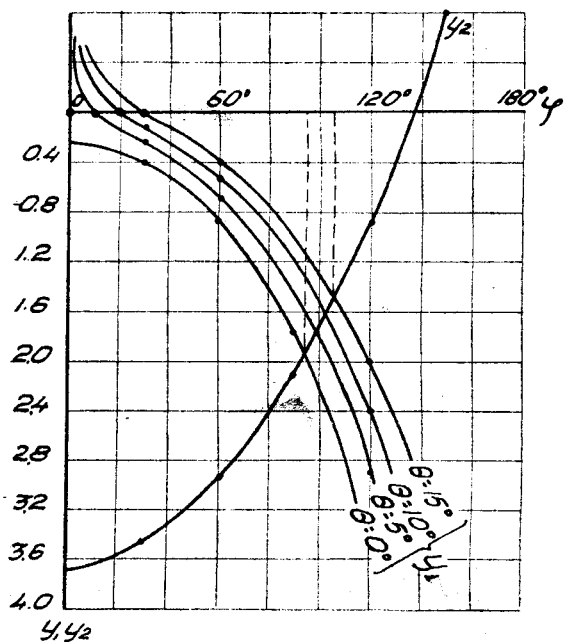
$$S = 19 \ln \frac{A}{1,102}.$$



Фиг. 4.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

Обозначая

$$y_1 = \frac{\text{Atg}\left(\frac{\varphi}{2} - \theta\right)}{\sin \frac{\varphi}{2}}$$

$$y_2 = -0,546 \frac{4(1-\varepsilon) \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{|S|} + \\ + 8\varepsilon \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{A}{B} (1-2\varepsilon) \cos \frac{\varphi}{2}.$$

φ	A	S	B	C	y_2
0°	0,9025	3,820	0,9025	00	0,757
30°	0,9160	3,520	0,8425	0,95	0,771
60°	0,9525	2,780	0,7680	1,65	0,790
90°	1,0025	1,810	0,6780	1,90	0,860
120°	1,0530	0,875	0,4590	1,65	1,080
150°	1,0900	0,230	0,2280	0,95	1,400
180°	—	0	0,0025	$\neq 0$	$-\infty$

φ	y_1			
	$\theta = 0$	$\theta = 5^\circ$	$\theta = 10^\circ$	$\theta = 15^\circ$
0°	0,9025	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
30°	0,955	+ 0,62	+ 0,31	0
60°	1,10	0,867	0,694	0,51
90°	1,41	—	—	—
120°	2,10	1,74	1,45	1,21
150°	3,76	—	—	1,95
180°	—	—	—	—

Таким образом мы получаем следующие результаты:
Крыло типа руля НЕЖ при $\varepsilon = 0,05$
(толщина 7% хорды)

Угол атаки $\theta = 0^\circ$ отрыва струй нет.
 $\theta = 5^\circ$ угол отрыва $\varphi = 41^\circ$,
 $\theta = 10^\circ$ угол отрыва $\varphi = 80^\circ$,
 $\theta = 15^\circ$ угол отрыва $\varphi = 104^\circ$,
при $\varepsilon = 0,1$ (толщина 14% хорды).

Угол атаки $\theta = 0^\circ$ угол отрыва $\varphi = 64^\circ$,
 $\theta = 5^\circ$ угол отрыва $\varphi = 80^\circ$,
 $\theta = 10^\circ$ угол отрыва $\varphi = 94^\circ$,
 $\theta = 15^\circ$ угол отрыва $\varphi = 108^\circ$,
при $\varepsilon = 0,5$ (толщина 62% хорды).

Угол атаки $\theta = 0^\circ$ угол отрыва $\varphi = 95^\circ$,
 $\theta = 5^\circ$ угол отрыва $\varphi = 99^\circ$,
 $\theta = 10^\circ$ угол отрыва $\varphi = 102^\circ$,
 $\theta = 15^\circ$ угол отрыва $\varphi = 105^\circ$.

Пользуясь формулой (17), нетрудно рассчитать, до какой величины ε мы будем иметь безотрывное обтекание.

Действительно, полагая в (17) $\theta = 0$ и $\varphi = 0$ и считая ε по формуле для тонких крыльев, мы получим:

$$\varepsilon_{\max} = 0,075$$

(19)

что соответствует профилю 11% толщины.

Таким образом из полученных результатов следует:

1. Тонкие крылья, до 11% толщины, обтекаются ламинарным потоком при нулевом угле атаки без срыва струй.

2. Интервал углов, в котором перемещается точка срыва, больше для тонких крыльев и очень сильно уменьшается с увеличением толщины профиля, т. е. у тонких крыльев положение точки срыва менее устойчиво.

3. Для тонких крыльев, при нулевом угле атаки, в условиях плоско-параллельного течения, полное лобовое сопротивление есть только сопротивление трения.

Заметим еще раз, что полученные значения угла φ есть значения его на отображающем цилиндре. Для большей ясности мы провели перерасчет от углов на отображающем цилиндре к процентам хорды, считая от хвостика профиля. В нижеследующей таблице приведены места срыва струй в процентах хорды.

а) $\varepsilon = 0,05$ (толщина 7%).

Угол атаки $\theta = 0^\circ$ — отрыва струй нет

$\theta = 5^\circ$ — место срыва на расстоянии 13,4% хорды, считая
от хвостика профиля,

$\theta = 10^\circ$ — место срыва на расстоянии 43,6% хорды,

$\theta = 15^\circ$ — " / " " " " 64% хорды.

в) $\varepsilon = 0,1$ (толщина 14%).

Угол атаки $\theta = 0^\circ$ место срыва струй на расстоянии 32% хорды

$\theta = 5^\circ$ " " " " " 46% " "

$\theta = 10^\circ$ " " " " " 57% " "

$\theta = 15^\circ$ " " " " " 69% " "

с) $\varepsilon = 0,5$ (толщина 62%).

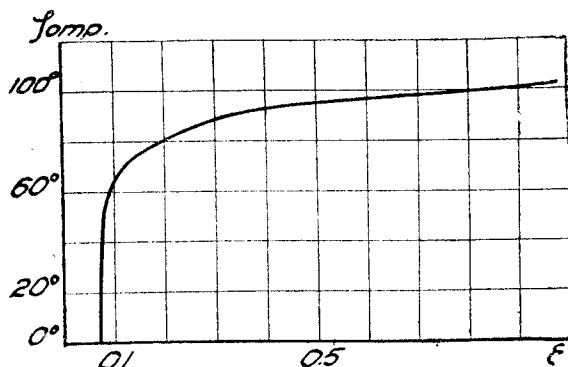
Угол атаки $\theta = 0^\circ$ место срыва струй на расстоянии 63% хорды

$\theta = 5^\circ$ " " " " " 66% " "

$\theta = 10^\circ$ " " " " " 68,5% " "

$\theta = 15^\circ$ " " " " " 71% " "

В заключение этого параграфа мы приводим график зависимости между положением точки срыва и толщиной профиля (фиг. 7). Как ясно видно отсюда, положение точки срыва для профилей толще 11% и примерно до 27% изменяется очень быстро, т. е. применение таких симметричных профилей в условиях работы при нулевом угле атаки очень невыгодно.



Фиг. 7.

§ 6. Лобовое сопротивление тонких симметричных крыльев Жуковского

Из выше приведенных результатов совершенно ясно следует, что мы можем непосредственно вычислить для тонких крыльев, т. е. таких, для которых возможно безотрывное обтекание при нулевом угле атаки, сопротивление трения. В данном случае это и будет полным лобовым сопротивлением крыла. Подсчет полного лобового сопротивления профилей толстых и при углах атаки, отличных от нулевого, гораздо более сложен и при современном состоянии теории может быть проведен только при наличии экспериментальных данных о строении вихревой дорожки Кармана, которая образуется сзади крыла при отрыве струй.

В следующей нашей статье мы предполагаем более подробно рассмотреть вопрос о теоретическом подсчете вихревого сопротивления, здесь же мы сознательно ограничиваем себя подсчетом тангенциальных усилий, возникающих благодаря вязкости при полном безотрывном обтекании.

Такое ограничение задачи имеет еще и следующие обоснования. Имея в виду проверить результаты наших теоретических расчетов на экспериментальных исследованиях, конечно, нужно было остановиться на тонких профилях, так как для них почти во всех крупных лабораториях были проведены тщательные исследования профильного сопротивления.

Кроме того этот тип крыльев исследован в очень большом интервале чисел Рейнольдса, и мы располагаем экспериментальными данными для

тонких профилей, полученных для таких R , когда выполняются условия ламинарного течения, что для нашей теории чрезвычайно важно, так как все получаемые здесь результаты пригодны только для ламинарных течений.

Как хорошо известно, при скольжении слоев вязкой жидкости на каждую единицу площади развивается тангенциальное напряжение, которое является элементарной силой трения и вычисляется по формуле Ньютона

$$\tau_0 = \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=0}.$$

Суммируя все элементарные силы трения вдоль всей поверхности крыла, мы получим общую силу трения, которая и дает нам полное лобовое сопротивление крыла.

Как указывалось в предыдущей главе

$$u = U \left[\left(1 + \frac{U \delta^2}{2\pi v} \right) - \frac{U' \delta}{\pi v} \cdot y + \frac{U' v^2}{2\pi v} \right] \cdot \sin \frac{\pi}{2\delta} y$$

и следовательно:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\pi}{2\delta} \cdot U \left[1 + \frac{U' \delta^2}{2\pi v} \right].$$

Значит элементарная сила трения на единицу площади будет:

$$\tau_0 = \mu U \frac{\pi}{2\delta} \left[1 + \frac{U' \delta^2}{2\pi v} \right].$$

Положим

$$\tau_0 = \tau_0' + \tau_0'',$$

где

$$\tau_0' = \mu U \frac{\pi}{2\delta}$$

и

$$\tau_0'' = \mu U U' \frac{\delta}{4v}.$$

Как уже неоднократно указывалось, для хорошо обтекаемых тел с достаточной для практики точностью можно считать

$$\delta = 4,8 \sqrt{\frac{\nu \cdot S}{U}},$$

где S — длина дуги профиля, а $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ — кинематический коэффициент вязкости.

Подставляя это значение δ , мы получим

$$\tau_0' = \frac{\pi}{9,6} \cdot \frac{\sqrt{\mu \rho U^3}}{\sqrt{S}} \quad (20)$$

$$\tau_0'' = \frac{4,8}{4} \cdot \mu \cdot \sqrt{S U U'^2} \quad (21)$$

и соответственные силы сопротивления.

$$W' = \frac{2\pi l}{9,6} \cdot \int_0^\pi \frac{\sqrt{\mu \rho U^3}}{\sqrt{S}} \cdot dS; \quad (22)$$

$$W'' = 2,4 \mu l \int_0^\pi \sqrt{S U U'^2} dS, \quad (23)$$

где l — длина крыла по размаху.

Коэффициент 2 появился потому, что трение происходит с двух сторон (верхней и нижней) крыла.

Задача теперь заключается в численном интегрировании (22) и (23), что нетрудно выполнить для тонких крыльев.

Действительно, мы имеем:

$$U = V_{\infty} \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \varphi}{\sqrt{(1 - 2\varepsilon) \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \varepsilon}}$$

и

$$S = \int_{\pi}^{\varphi} \frac{4(1 - \varepsilon) \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \varphi} \cdot d\varphi = \int_{\pi}^{\varphi} \frac{C}{A} \cdot d\varphi.$$

Для $\varepsilon < 0,075$ мы можем пренебречь ε^2 и тогда получим

$$W' = \frac{2\pi l}{9,6} V_{\mu\rho} V_{\infty}^3 \cdot \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{A \cos^2 \frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{B^3}} \cdot C \cdot d\varphi.$$

Выполняя интегрирование графически, получим:

$$W' = 3,32 \left(\frac{d \cdot l}{2} \right) \cdot \sqrt{\mu \rho} V_{\infty}^3, \quad (24)$$

где d — хорда крыла.

Совершенно аналогичными выкладками мы приводим (23) к следующему виду:

$$W'' = 1,04 \left(\frac{d \cdot l}{2} \right) \cdot \sqrt{\mu \cdot \rho} \cdot V_{\infty}^3. \quad (25)$$

Таким образом полное лобовое сопротивление тонкого профиля ($\varepsilon = 0,05$) будет:

$$W = 4,36 \left(\frac{S}{2} \right) \cdot \sqrt{\mu \cdot \rho} \cdot V_{\infty}^3. \quad (26)$$

Сравнивая формулу (26) с обычной аэродинамической формулой, по которой рассчитывается лобовое сопротивление крыла,

$$W = C_x \rho S V_{\infty}^2 \quad (27)$$

легко определить зависимость коэффициента лобового сопротивления от числа Рейнольдса.

Действительно из (26) и (27) имеем, приравняв правые части

$$2,18 \cdot S \cdot \sqrt{\mu \rho} V_{\infty}^3 = C_x \rho S V_{\infty}^2,$$

откуда:

$$C_x = \frac{2,18 \sqrt{\mu \rho} V_{\infty}^3}{\rho V_{\infty}^2} \cdot \frac{V_{\infty}}{d}.$$

Обозначая

$$R = \frac{V_{\infty} \cdot d}{\nu},$$

получаем окончательно:

$$\boxed{C_x = \frac{4,25}{\sqrt{R}}}, \quad (28)$$

так как

$$\sqrt{d} = \sqrt{\frac{4}{1+\varepsilon}} = 1,95.$$

Таким образом, в случае безотрывного обтекания коэффициент лобового сопротивления обратно пропорционален корню квадратному из числа Рейнольдса, а сила лобового сопротивления в этом случае пропорциональна не V_{∞}^2 , а только $V_{\infty}^{3/2}$.

Полученные результаты качественно полностью согласуются с основными положениями теории пограничного слоя Прандтля, согласно которым величина силы трения пропорциональна $V_{\infty}^{3/2}$.

Что касается количественных результатов, даваемых формулой (28), то они, конечно, не совпадают с результатами экспериментов, проведенных при больших числах Рейнольдса, так как при всех предыдущих расчетах мы исходили из представлений ламинарного течения около тела.

Действительно, экспериментальные исследования профилей, очень близких к рассмотренному нами*, дают для коэффициента лобового сопротивления C_x при $R = 10^6$ значение равное 0,006.

По нашей формуле $R = 10^6$

$$C_x = 0,00425,$$

т. е. значение меньше экспериментального на 29,2%. Этот результат не опровергает предыдущего, так как коэффициент турбулентного трения гораздо больше коэффициента ламинарного трения.

* Handbuch der Experimental Physik. Bd. IV, t. II. S. 256 — 259.

S U M M A R Y

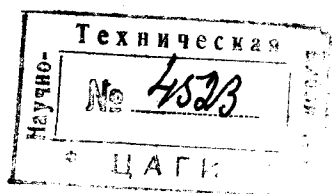
In the article an approximate method of integration of the laminar boundary layer differential equations is developed based on the Karman integral relation. Unlike the Polhausen method in the method developed by the author of the present work the functions of the boundary layer velocity distribution are expanded into a trigonometrical series which makes the introduction of an additional boundary condition unnecessary and allows to obtain a velocity distribution curve, which shows a good agreement with experimental data. The author states a new condition of the break away of the flow from a curvilinear contour and solves the problem of determination of the critical burbling points for elliptical cylinders of different eccentricity placed in a laminar flow at different angles of incidence. The obtained theoretical results show a sufficiently good agreement with experimental data.

In the second article the problem of determination of the critical burbling point for a symmetrical aerofoil of the inversion of parabola type for different angles of incidence is solved. It is shown that wings with a relative thickness up to 11% at a zero incidence have a laminar boundary layer without a burbling point.

The total drag of such wings may be determined in a theoretical way. The calculated value of the drag coefficient is $\frac{4,25}{\sqrt{R}}$.

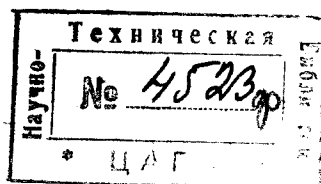
ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Краткое содержание	2
Приближенное интегрирование дифференциального уравнения ламинарного пограничного слоя	3
§ 1. Введение	3
§ 2. Основные идеи теории пограничного слоя	4
§ 3. Интегральное соотношение	6
§ 4. Выбор функции u (y)	8
§ 5. Определение точки срыва струй	13
§ 6. Круглый цилиндр	14
§ 7. Эллиптический цилиндр	16
Теоретический расчет профильного сопротивления руля Жуковского	21
§ 1. Постановка задачи	21
§ 2. Построение потенциального потока около руля Жуковского	22
§ 3. Вычисление длины дуги руля НЕЖ	25
§ 4. Определение точки срыва струй	26
§ 5. Вычисления положения точек срыва струй для серии профилей типа руля НЕЖ	28
§ 6. Лобовое сопротивление тонких симметричных крыльев Жуковского	31
Summary	35



Труды Центрального аэро-гидродинамического института
им. проф. Н. Е. Жуковского

Выпуск 215



А. А. КОСМОДЕМЬЯНСКИЙ

К ТЕОРИИ ЛОБОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

I

ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

II

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПРОФИЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ РУЛЯ ЖУКОВСКОГО

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
24	10 сверху	$\frac{dw}{d\zeta} \cdot \frac{dw}{d\zeta}$	$\frac{dw}{d\zeta} \cdot \frac{d\bar{w}}{d\zeta}$
24	11 "	где $\frac{dw}{d\zeta}$	где $\frac{d\bar{w}}{d\zeta}$
25	9 "	$d = [-\sin \varphi \dots$	$d\bar{\zeta} = [-\sin \varphi$
32	17 "	$\tau_0 = \mu U \frac{\pi}{2\varepsilon} \dots$	$\tau_0 = \mu U \frac{\pi}{2\sigma}$

Заказ 407.